Asymptotische Mehrteilchen-Feldoperatoren für phänomenologische Potentiale

PETER NATUSCH

Institut IV für Theoretische Physik der Universität Marburg *

(Z. Naturforsch. **23a**, 1834—1840 [1968]; eingegangen am 20. Juli 1968)

In W. Sandhas' field theoretical formulation[1] of the nonrelativistic multichannel scattering theory the existence of asymptotic multiparticle field operators is discussed for phenomenological potentials. For potentials with momentum-dependent terms it is necessary to treat the convergence of time-dependent field operators on a special subset, — dense in the Hilbert space of states; concerning the position-dependency of tensor- and angular momentum-forces it is necessary to make use of a sharpened asymptotic condition.

§ 1. Einleitung

SANDHAS gibt in [1] eine feldtheoretische Formulierung der nicht-relativistischen Mehrkanal-Streutheorie für identische Teilchen[2], die die Zerlegung des Gesamt-Hamilton-Operators in Kanal-Hamilton-Operatoren vermeidet und einen Existenzbeweis für Streuzustände auch in den Fällen ermöglicht, in denen die Kanal-Moller-Operatoren möglicherweise nicht existieren[3]. Eine ausführliche Diskussion der Literatur hierzu findet man bei [1].

Die Sandhassche Formulierung illustriert einerseits die feldtheoretischen Methoden; andererseits ist es zu hoffen, daß sie eine brauchbare Beschreibung[4] der Fragment-Fragment-Streuung in der niederenergetischen Kernphysik ermöglicht. Dazu ist zuerst die Existenz von Streuzuständen durch eine Asymptotenbedingung für eine phänomenologische Wechselwirkung zu sichern.

Zu diesem Zwecke werden mit Hilfe von Mehrteilchen-Feldoperatoren[5]

$$b^+_{m\alpha\mu}(s)$$

(m Teilchenzahl, α Quantenzahlen der Schwerpunktsbewegung, μ interne Quantenzahlen), die aus dem Vakuum Φ_0 gebundene m-Teilchen-Zustände erzeugen, zeitabhängige Hilbert-Raum-Vektoren

$$\Phi_{(m\alpha\mu)_1\ldots(m\alpha\mu)_F}(s) = \prod_{f=1}^{F} b^+_{(m\alpha\mu)_f}(s)\,\Phi_0$$

konstruiert und Streuzustände als deren zeitliche Limites

$$\Phi^{\substack{\text{in}\\\text{out}}}_{(m\alpha\mu)_1\ldots(m\alpha\mu)_F} = \lim_{s\to\mp\infty} \Phi_{(m\alpha\mu)_1\ldots(m\alpha\mu)_F}(s)$$

definiert. Der in [1] geführte Existenzbeweis für diese Streuzustände wird in der vorliegenden Arbeit für ein impuls- und spinabhängiges Potential verallgemeinert.

Die Sandhassche Beschreibung von Fermionen-Systemen wird in § 2 unter Einbeziehung der Spinabhängigkeit rekapituliert. In § 3 wird die Existenz der Streuzustände für einen typischen Potentialbeitrag

$$V_I(\boldsymbol{r}) \prod_{k=1}^{o} \boldsymbol{r}_{a_k} \prod_{l=1}^{p} \boldsymbol{u}_{b_l}\, \boldsymbol{s}^{(1)}_{c_1;\,\sigma_1\sigma_1'}\, \boldsymbol{s}^{(2)}_{c_2;\,\sigma_2\sigma_2'}$$

$$\sim V_{op2}(\boldsymbol{r}) \prod_{l=1}^{p} \boldsymbol{u}_{b_l}\, \boldsymbol{s}^{(1)}_{c_1;\,\sigma_1\sigma_1'}\, \boldsymbol{s}^{(2)}_{c_2;\sigma_2\sigma_2'}$$

bewiesen. Dabei wird die in [1] angegebene hinreichende Existenzbedingung in Abhängigkeit von den die Ordnung der Orts-, Impuls-, Spinanteile zählenden Parametern o, p, q untersucht. Unter der Voraussetzung

$$\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, \Big| V_I(\boldsymbol{r}) \prod_{k=1}^{o} \boldsymbol{r}_{a_k} \Big|^2 < +\infty$$

ergibt sich die starke Konvergenz der Feldoperatoren $b^+_{m\alpha\mu}(s)$ gegen (kanonischen Vertauschungsregeln genügende) „in"- bzw. „out"-Operatoren. Beim Beweis werden die Feldoperatoren $\mathring{b}^+_{m\alpha\mu}(s)$ auf einer im Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$ der Zustände dicht liegenden Menge $\mathfrak{H}'(p)$ betrachtet. Im allgemeinen ist $\mathfrak{H}'(p)$ eine echte Teilmenge von $\mathfrak{H}$; dies hat seinen Grund darin, daß die $\mathring{b}^+_{m\alpha\mu}(s)$ Differentiationen enthalten.

* Jetzige Anschrift: Sektion Physik der Universität München, Lehrstuhl Prof. SÜSSMANN; 8 München 13, Schellingstraße 2—8.

1 W. SANDHAS, Comm. Math. Phys. **3**, 358 [1966].

2 H. EKSTEIN, Phys. Rev. **101**, 880 [1956]; Nuovo Cim. **4**, 1017 [1956]. — R. HAAG, Phys. Rev. **112**, 669 [1958].

3 W. BRENIG u. R. HAAG, Fortschr. Phys. **7**, 183 [1959].

4 J. L. BALLOT u. F. BECKER, Phys. Rev. **164**, 1285 [1967]. P. NATUSCH, Diplomarbeit, Marburg 1966, unveröffentlicht.

5 Eine Übersicht der verwendeten Zeichen findet sich im Anhang IV.

§ 2. Voraussetzungen und Definitionen

2a) Die Operatoren H, N, **P**, **R**

Es wird ein System von Fermionen (Masse M, Spin 1/2 (Index σ)) nicht-relativistisch unter Berücksichtigung einer symmetrischen phänomenologischen 2-Teilchen-Wechselwirkung behandelt.

Der das System beschreibende Hamilton-Operator[6] schreibt sich im feldtheoretischen Formalismus

$$
\begin{aligned}
\mathsf{H} = {} & \sum_{\sigma \boldsymbol{s}} \Psi^+(\sigma\, \boldsymbol{s}) \frac{\boldsymbol{v}^2}{2\,M} \Psi(\sigma\, \boldsymbol{s}) \\
& + \tfrac{1}{2} \sum_{(\sigma\sigma'\boldsymbol{s})_{1,2}} \Psi^+(\sigma\, \boldsymbol{s})_1 \Psi^+(\sigma\, \boldsymbol{s})_2 \\
& \cdot V\left({\sigma_1\sigma_1' \atop \sigma_2\sigma_2'};\, \boldsymbol{s}_{12}\, \boldsymbol{v}_{12}\right) \Psi(\sigma'\, \boldsymbol{s})_2 \Psi(\sigma'\, \boldsymbol{s})_1 \qquad (2.1) \\
& \boldsymbol{s}_{12} = \boldsymbol{s}_1 - \boldsymbol{s}_2\,, \quad \boldsymbol{v}_{12} = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)\,, \\
& \boldsymbol{v} = \frac{1}{i} \nabla_{\boldsymbol{s}}\,, \quad \hbar = 1\,, \sum_{\sigma \boldsymbol{s}} = \sum_{\sigma} \int \mathrm{d}^3 \boldsymbol{s}
\end{aligned}
$$

unter Verwendung von Feldoperatoren

$$
\begin{aligned}
\Psi(\sigma)\,, \quad \Psi(\sigma, \boldsymbol{s}, s) = {} & \exp\{i\, \mathsf{H}\, s\} \exp\{-i\, \mathbf{P}\, \boldsymbol{s}\} \qquad (2.2) \\
& \cdot \Psi(\sigma) \exp\{i\, \mathbf{P}\, \boldsymbol{s}\} \exp\{-i\, \mathsf{H}\, s\}\,,
\end{aligned}
$$

die den gleichzeitigen Vertauschungsrelationen

$$
\begin{aligned}
& [\Psi(\sigma\, \boldsymbol{s}\, s)',\, \Psi^+(\sigma\, \boldsymbol{s}\, s)]_{+s'=s} = \delta_{\sigma\sigma'}\, \delta(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}')\,, \\
& [\Psi^+(\sigma\, \boldsymbol{s}\, s)',\, \Psi^+(\sigma\, \boldsymbol{s}\, s)]_{+s'=s} \qquad (2.3) \\
& \qquad = [\Psi(\sigma\, \boldsymbol{s}\, s)',\, \Psi(\sigma\, \boldsymbol{s}\, s)']_{+s'=s} = 0
\end{aligned}
$$

genügen. $\Psi(\sigma\, \boldsymbol{s}\, s)$ löst dann die Bewegungsgleichung

$$
\begin{aligned}
i\, \dot{\Psi}(\sigma\, \boldsymbol{s}\, s) & = [\Psi(\sigma\, \boldsymbol{s}\, s),\, \mathsf{H}] \\
& = \sum_{\sigma'} \left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2\,M} \delta_{\sigma\sigma'} + U_{\sigma\sigma'}(\boldsymbol{s}\, \boldsymbol{v}\, s) \right) \Psi(\sigma'\, \boldsymbol{s}\, s)
\end{aligned}
$$

mit (2.4)

$$
\begin{aligned}
U_{\sigma_1\sigma_1'}(\boldsymbol{s}_1\, \boldsymbol{v}_1\, s) = & \sum_{(\sigma\sigma'\boldsymbol{s})_2} \Psi^+(\sigma_2\, \boldsymbol{s}_2\, s) \\
& \cdot V\left({\sigma_1\sigma_1' \atop \sigma_2\sigma_2'};\, \boldsymbol{s}_{12}\, \boldsymbol{v}_{12}\right) \Psi(\sigma_2'\, \boldsymbol{s}_2\, s)
\end{aligned}
$$

Teilchenzahl-, Gesamtimpuls-, Schwerpunkt-Operator schreiben sich

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{N} = \sum_{\sigma \boldsymbol{s}} \Psi^+(\sigma\, \boldsymbol{s}) \Psi(\sigma\, \boldsymbol{s})\,, \quad \mathbf{P} = \sum_{\sigma \boldsymbol{s}} \Psi^+(\sigma\, \boldsymbol{s})\, \boldsymbol{v}\, \Psi(\sigma\, \boldsymbol{s})\,, \\
& \mathbf{R} = \mathsf{N}^{-1} \sum_{\sigma \boldsymbol{s}} \Psi^+(\sigma\, \boldsymbol{s})\, \boldsymbol{s}\, \Psi(\sigma\, \boldsymbol{s})\,. \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

Für das symmetrische phänomenologische Potential wird angesetzt:

$$
\begin{aligned}
V\left({\sigma_1\sigma_1' \atop \sigma_2\sigma_2'};\, \boldsymbol{r}\, \boldsymbol{u}\right) = {} & \{V_R(\boldsymbol{r}) + V_P(\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{u}^2 + V_L(\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{l}^2\}\, \delta^{(1)}_{\sigma_1\sigma_1'};\, \delta^{(2)}_{\sigma_2\sigma_2'} \\
& + V_{SL}(\boldsymbol{r}) \{\boldsymbol{s}^{(1)}_{\sigma_1\sigma_1'}\, \boldsymbol{l}\, \delta^{(2)}_{\sigma_2\sigma_2'} + \delta^{(1)}_{\sigma_1\sigma_1'}\, \boldsymbol{l}\, \boldsymbol{s}^{(2)}_{\sigma_2\sigma_2'}\} \\
& + \sum_{i} V_{Ti}(\boldsymbol{r})\, \tfrac{1}{2} (\boldsymbol{i}\, \boldsymbol{s}^{(1)}_{\sigma_1\sigma_1'}) (\boldsymbol{s}^{(2)}_{\sigma_2\sigma_2'}\, \boldsymbol{i}) + (\boldsymbol{s}^{(2)}_{\sigma_2\sigma_2'}\, \boldsymbol{i}) (\boldsymbol{i}\, \boldsymbol{s}^{(1)}_{\sigma_1\sigma_1'})\} \qquad (2.6) \\
& i: R, P, L;\ \boldsymbol{i}: \boldsymbol{r}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{l};\ \boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{u};\ 2\, \boldsymbol{s}_{\sigma\sigma'} \text{ Vektor der Pauli-Matrizen} \\
& V\left({\sigma_1\sigma_1' \atop \sigma_2\sigma_2'};\, \boldsymbol{r}_{12}\, \boldsymbol{u}_{12}\right) = V\left({\sigma_2\sigma_2' \atop \sigma_1\sigma_1'};\, \boldsymbol{r}_{21}\, \boldsymbol{u}_{21}\right).
\end{aligned}
$$

Die $V_I(\cdot)$ $(I = R, P, L, SL, TR, TP, TL)$[7] seien reell.

Im Hinblick auf die in § 3 durchzuführenden Rechnungen empfiehlt es sich, in den einzelnen Potentialbeiträgen zusammengesetzte Differentialausdrücke in Faktoren, die nur Ableitungen, und solche, die keine Ableitungen enthalten, zu zerlegen (siehe Anhang III). Ein typischer Beitrag zum Potential ist

$$
V_{op2}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \vdots & \vdots & ;\, \boldsymbol{r} \\ a_0 & b_p & c_2 \end{pmatrix} \prod_{l=1}^{p} \boldsymbol{u}_{b_l}\, \boldsymbol{s}^{(1)}_{c_1;\sigma_1\sigma_1'}\, \boldsymbol{s}^{(2)}_{c_2;\sigma_2\sigma_2'}\,. \qquad (2.7)
$$

2b) Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$, *Teilmenge* $\mathfrak{H}'(p)$

Sei

$$
L^2(R^{3m}_{\boldsymbol{s}}) = \left\{ G_m\left({\sigma_1 \ldots \sigma_m \atop \cdot \quad \cdot}\right) \,\middle|\, \begin{array}{l} \sum\limits_{(\sigma\boldsymbol{s})_{1\ldots m}} \left| G_m\left({\sigma_1 \ldots \sigma_m \atop \boldsymbol{s}_1 \ldots \boldsymbol{s}_m}\right) \right|^2 < +\infty \\ G_m\left({\sigma_1 \ldots \sigma_m \atop \boldsymbol{s}_1 \ldots \boldsymbol{s}_m}\right) \text{ antisymetrisch in } (\sigma, \boldsymbol{s})_k \end{array} \right\} \qquad (2.8)
$$

und

$$
\mathfrak{H}_m = \left\{ \Phi_{G_m} \,\middle|\, \begin{array}{l} \Phi_{G_m} = \sum\limits_{(\sigma\boldsymbol{s})_{1\ldots m}} G_m\left({\sigma_1 \ldots \sigma_m \atop \boldsymbol{s}_1 \ldots \boldsymbol{s}_m}\right) \frac{1}{\sqrt{m!}} \prod\limits_{k=1}^{m} \Psi^+(\sigma\, \boldsymbol{s})_k\, \Phi_0 \\ G_m\left({\sigma_1 \ldots \sigma_m \atop \cdot \ \ldots \ \cdot}\right) \in L^2\ (R^{3m}_{\boldsymbol{s}}) \end{array} \right\}, \qquad (2.9)
$$

[6] Da der Beweisgang für Isospin- und Spin-Abhängigkeit der gleiche ist, wird auf die Isospin-Abhängigkeit von H verzichtet.

[7] Für $V_I = V_I(|\boldsymbol{r}|, |\boldsymbol{u}|, |\boldsymbol{l}|)$ ist das phänomenologische Potential galilei-invariant[8].

[8] S. OKUBO u. R. E. MARSHAK, Ann. Phys. New York **4**, 166 [1958]. — G. SÜSSMANN, Vielteilchen-Seminar, Frankfurt 1967, Ist. Sup. Sanità, ISS 67/30 31—48, Rom (14. 9. 1967).

$\mathfrak{H}^{(N)} = \bigoplus_{m=0}^{N} \mathfrak{H}_m = \mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_0 = \{\Phi_0\}$, $N < +\infty$, fest, genügend groß, wobei Φ_0 das Vakuum bezeichne. H ist dann auf $\mathfrak{H}$ wesentlich selbstadjungiert.

Neben $\mathfrak{H}_m$ wird aus beweistechnischen Gründen noch eine in $\mathfrak{H}_m$ dicht (!) liegende Menge

$$\mathfrak{H}_m'(p) = \left\{ \Phi_{F_m} \,\middle|\, \begin{array}{l} \Phi_{F_m} \in \mathfrak{H}_m \cdot D_k^p \, F_m \left({\sigma_1 \ldots \sigma_m \atop \bullet \cdots \bullet} ; s \right) \text{ für } 1 \leqq k \leqq m \\ \text{quadratintegrabel mit zeitunabhängiger Schranke} \end{array} \right\} \tag{2.10}$$

$$\mathfrak{H}'(p) = \bigoplus_{m=0}^{N} \mathfrak{H}_m'(p), \quad 0 \leqq p \leqq 2$$

definiert, wobei

$$F_m \left({\sigma_1 \ldots \sigma_m \atop \bullet \cdots \bullet} ; s \right) \quad \text{mit} \quad F_m \left({\sigma_1 \ldots \sigma_m \atop \bullet \cdots \bullet} ; 0 \right) = F_m \left({\sigma_1 \ldots \sigma_m \atop \bullet \cdots \bullet} \right) \in L^2 (R_{\boldsymbol{s}}^{3m})$$

die zeitabhängige m-Teilchen-Schrödinger-Gleichung zum (2.1) entsprechenden Hamilton-Operator im Orts-Spin-Raum löse und D_k^p den Differential-Operator

$$\prod_{l=1}^{p} \boldsymbol{v}_{k i b_l} \quad 0 \leqq p \leqq 2, \quad 1 \leqq k \leqq m \quad b_l : 1, 2, 3$$

bezeichne. Die Eigenschaften

$$\mathfrak{H}_m'(p) \text{ dicht in } \mathfrak{H}_m, \quad 1 \leqq p \leqq 2$$

$$\sum_{(\tau \boldsymbol{t})_{1 \ldots m}} \left| D_k^p F_m \left({\tau_1 \ldots \tau_m \atop \boldsymbol{t}_1 \ldots \boldsymbol{t}_m} ; t \right) \right|^2 \leqq K < \infty, \; K \text{ zeitunabhängig}$$

stellen eine Forderung an das Potential dar; dagegen folgt

$$\sum_{(\tau \boldsymbol{t})_{1 \ldots m}} \left| F_m \left({\tau_1 \ldots \tau_m \atop \boldsymbol{t}_1 \ldots \boldsymbol{t}_m} ; t \right) \right|^2 \leqq K < \infty, \; K \text{ zeitunabhängig}$$

unmittelbar aus

$$\left\| e^{-i\mathsf{H}t} \Phi_{F_m} \right\|^2 = \sum_{(\tau \boldsymbol{t})_{1 \ldots m}} \left| F_m \left({\tau_1 \ldots \tau_m \atop \boldsymbol{t}_1 \ldots \boldsymbol{t}_m} ; t \right) \right|^2 = \left\| \Phi_{F_m} \right\|^2 .$$

2c) Mehrteilchen-Feldoperatoren

In enger Anlehnung an [1] werden mit Hilfe von Funktionensystemen

$$\left\{ G_{m\mu} \left({\sigma_1 \; \ldots \; \sigma_m \atop \bullet - \bullet \cdots \bullet - \bullet} \right) \,\middle|\, \begin{array}{l} \left[- E_{m\mu} - \dfrac{\boldsymbol{v}^2}{2 M m} + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \dfrac{\boldsymbol{v}_k^2}{2M} \right] G_{m\mu}^{\times} \left({\sigma_1 \ldots \sigma_m \atop \boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}_1 \ldots \boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}_m} \right) \\ + \displaystyle\sum_{l > k}^{1 \ldots m} \sum_{\sigma \sigma'} V \left({\sigma_l \sigma \atop \sigma_k \sigma'} ; \boldsymbol{s}_{lk} \, \boldsymbol{v}_{lk} \right) G_{m\mu}^{\times} \left({\sigma_1 \ldots \sigma_{k-1} \, \sigma' \sigma_{k+1} \ldots \sigma_{l-1} \, \sigma \sigma_{l+1} \ldots \sigma_m \atop \boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}_1 \; \ldots \ldots \; \boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}_m} \right) = 0 \end{array} \right\}$$

und

$$\left\{ f_{m\alpha}(\cdot, \cdot) \,\middle|\, \begin{array}{l} f_{m\alpha}(\boldsymbol{s}, s) = \displaystyle\sum_{\boldsymbol{k}} (2\pi)^{-3/2} \exp \left\{ i \left(\boldsymbol{k} \boldsymbol{s} - \frac{\boldsymbol{k}^2}{2 M m} s \right) \right\} \tilde{f}_\alpha(\boldsymbol{k}); \; \{\tilde{f}_\alpha(\cdot)\} \text{ in } L^2(R_{\boldsymbol{k}}^3)_1 \\ \text{vollständiges Orthonormalsystem von Testfunktionen.} \end{array} \right\}$$

Mehrteilchen-Feldoperatoren

$$B_{m\mu}(\boldsymbol{s}, s) = \sum_{(\sigma \boldsymbol{s})_{1 \ldots m}} G_{m\mu} \left({\sigma_1 \ldots \sigma_m \atop \boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}_1 \ldots \boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}_m} \right) \frac{1}{\sqrt{m!}} \Psi(\sigma_m \, \boldsymbol{s}_m \, s) \cdots \Psi(\sigma_1 \, \boldsymbol{s}_1 \, s),$$

$$\begin{aligned} b_{m\alpha\mu}(s) &= \sum_{(\sigma \boldsymbol{s})_{1 \ldots m}} \left\{ \sum_{\boldsymbol{s}} f_{m\alpha}^{\times}(\boldsymbol{s} \, s) \, G_{m\mu} \left({\sigma_1 \ldots \sigma_m \atop \boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}_1 \ldots \boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}_m} \right) \exp\{i E_{m\mu} s\} \right\} \frac{1}{\sqrt{m!}} \Psi(\sigma_m \, \boldsymbol{s}_m \, s) \cdots \Psi(\sigma_1 \, \boldsymbol{s}_1 \, s) \\ &= \sum_{\boldsymbol{s}} f_{m\alpha}^{\times}(\boldsymbol{s} \, s) \exp\{i E_{m\mu} s\} \, B_{m\mu}(\boldsymbol{s} \, s) \end{aligned} \tag{2.11}$$

für gebundene m-Teilchen-Zustände konstruiert. Die Forderungen

$$(\mathbf{R} - \boldsymbol{s})\, B^{+}_{m\mu}(\boldsymbol{s}, 0)\, \Phi_0 = 0\,, \quad (\mathsf{H} - \frac{1}{2M}\, \mathsf{N}^{-1} \mathbf{P}^2 - E_{m\mu})\, B_{m\mu}(\boldsymbol{s}, 0)\, \Phi_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\, b^{+}_{m\alpha\mu}(s)\, \Phi_0 = 0 \tag{2.12}$$

sind dann durch Wahl der $G_{m\mu}$ erfüllt (s.a. Anhang II). Wegen

$$U_{\sigma_k\sigma}(\boldsymbol{s}_k\, \boldsymbol{v}_k\, s)\, \Phi_0 = 0 \quad \text{und der Antisymmetrie der } G_{m\mu} \text{ gilt:}$$

$$\frac{1}{m}\, \frac{1}{i}\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\, b^{+}_{m\alpha\mu}(s) = \sum_{(\sigma \boldsymbol{s})_{1\ldots m}} \frac{1}{\sqrt{m!}} \prod_{k=1}^{m} \Psi^{+}(\sigma_k\, \boldsymbol{s}_k\, s) \left\{ \sum_{\sigma} U_{\sigma_k\sigma}(\boldsymbol{s}_1\, \boldsymbol{v}_1\, s) \sum_{\boldsymbol{s}} f_{m\alpha}(\boldsymbol{s}\, s)\, G^{\times}_{m\mu}\left({\sigma_1 \ldots \sigma_m \atop \boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}_1 \ldots \boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}_m}; s \right) \right\} \cdot \tag{2.13}$$

$$G^{\times}_{m\mu}\left({\sigma_1\; \ldots\; \sigma_m \atop \bullet-\bullet \cdots \bullet-\bullet}; s \right) = \exp\{i\, E_{m\mu}\, s\}\, G^{\times}_{m\mu}\left({\sigma_1\; \ldots\; \sigma_m \atop \bullet-\bullet \cdots \bullet-\bullet} \right)$$

genügt hierbei der zugehörigen zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung. Da in (2.14) noch Differential-Operatoren auftreten, ist $\dot{b}^{+}_{m\alpha\mu}(s)$ nur auf $\mathfrak{H}'(p)$ (siehe (2.10)) definiert.

§ 3. Existenz der Streuzustände

Zum Nachweis der Existenz der nach [1] durch

$$\Phi^{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}_{(m\alpha\mu)_1\ldots F} = \lim_{s\to\mp\infty} \prod_{f=1}^{F} b^{+}_{(m\alpha\mu)_f}(s)\, \Phi_0 \tag{3.1}$$

definierten Streuzustände wird unter bestimmten Voraussetzungen über die Potentialfunktionen $V_I(\cdot)$ $(I = R, P, L, SL, TR, TP, TL)$ — sofern $\mathfrak{H}$ nur Zustände mit endlicher Teilchenzahl enthält — gezeigt:

(b) $b^{+}_{m\alpha\mu}(s)$ ist ein auf $\mathfrak{H}$ beschränkter Operator mit zeitunabhängiger Schranke;

(a) zu jedem Zustand $\Phi \in \mathfrak{H}'(p)$ gibt es eine positive Konstante $K^{m\alpha\mu}_{\Phi}$ mit

$$\| \dot{b}^{+}_{m\alpha\mu}(s)\, \Phi \| \leqq K^{m\alpha\mu}_{\Phi}\, |t|^{-3/2}\, \|\Phi\|\,. \tag{3.2}$$

Wegen

$$\| (b^{+}_{m\alpha\mu}(s_2) - b^{+}_{m\alpha\mu}(s_1))\, \Phi \| = \| \int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}s\, \dot{b}^{+}_{m\alpha\mu}(s)\, \Phi \| \leqq | \int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}s\, \| \dot{b}^{+}_{m\alpha\mu}(s)\, \Phi \| \,|$$

ist (3.2) hinreichend für die Existenz des starken Limes

$$b^{+\substack{\text{in}\\ \text{out}}}_{m\alpha\mu} = \lim_{s\to\mp\infty} b^{+}_{m\alpha\mu}(s) \tag{3.3}$$

als beschränkter linearer Operator auf $\mathfrak{H}'(p)$. Da nach (b) $b^{+}_{m\alpha\mu}(s)$ auf ganz $\mathfrak{H}$ beschränkt ist und $\mathfrak{H}'(p)$ in $\mathfrak{H}$ dicht liegt, folgt die Existenz von (3.3) auch auf ganz $\mathfrak{H}$. Die Normkonvergenz der Zustände ergibt sich dann mittels

$$\begin{aligned} \| \Phi^{\text{in}}_{(m\alpha\mu)_1\ldots F} - \Phi_{(m\alpha\mu)_1\ldots F}(s) \| &= \| (\prod_{f=1}^{F} b^{+\text{in}}_{(m\alpha\mu)_f} - \prod_{f=1}^{F} b^{+}_{(m\alpha\mu)_f}(s))\, \Phi_0 \| \\ &\leqq \sum_{f=1}^{F} \| b^{+}_{(m\alpha\mu)_1}(s) \cdots b^{+}_{(m\alpha\mu)_{f-1}}(s)\, (b^{+\text{in}}_{(m\alpha\mu)_f} - b^{+}_{(m\alpha\mu)_f}(s))\, b^{+\text{in}}_{(m\alpha\mu)_{f+1}} \cdots b^{+\text{in}}_{(m\alpha\mu)_F}\, \Phi_0 \|\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

3a) $\dot{b}^{+}_{m\alpha\mu}(s)$ ist ein auf $\mathfrak{H}'(p)$ beschränkter Operator

Zum Beweis von (3.2) werden Hilbert-Raum-Vektoren

$$\Phi_{F_n} = \sum_{(\tau \boldsymbol{t})_{1\ldots n}} F_n\left({\tau_1 \ldots \tau_n \atop \boldsymbol{t}_1 \ldots \boldsymbol{t}_n} \right) \frac{1}{\sqrt{n!}} \prod_{l=1}^{n} \Psi^{+}(\tau\, \boldsymbol{t})_l\, \Phi_0 \subset \mathfrak{H}'_n(p) \subset \mathfrak{H}'(p) \tag{3.5}$$

zur Teilchenzahl n betrachtet. Für $b^{\cdot +}_{m\alpha\mu}(s)\,\Phi_{F_n}$ erhält man aus (2.14):

$$b^{\cdot +}_{m\alpha\mu}(s)\,\Phi_{F_n} = \frac{i}{\sqrt{n!\,m!}}\, e^{i\mathsf{H}s} \sum_{(\sigma \boldsymbol{s})_{1\ldots m}} \prod_{k=1}^{m} \Psi^{+}(\sigma\, \boldsymbol{s})_k \left\{ \sum_{k=1}^{m} \sum_{\sigma - \boldsymbol{s}} U_{\sigma_k \sigma}(\boldsymbol{s}\,\boldsymbol{v})_k\, f_{m\alpha}(\boldsymbol{s}\, s)\, G^{\times}_{m\mu}\left(\begin{smallmatrix}\sigma_1 \ldots \sigma_m\\ \boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}_1 \ldots \boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}_m\end{smallmatrix};\, s\right)\right\} \tag{3.6}$$
$$\cdot\, e^{-i\mathsf{H}s} \sum_{(\tau \boldsymbol{t})_{1\ldots n}} F_n\left(\begin{smallmatrix}\tau_1 \ldots \tau_n\\ \boldsymbol{t}_1 \ldots \boldsymbol{t}_n\end{smallmatrix}\right) \prod_{l=1}^{n} \Psi^{+}(\tau\, \boldsymbol{t})_l\, \Phi_0 .$$

Wählt man $F_n(\cdots,\cdot)$ entsprechend der Konstruktion von $\mathfrak{H}'(p)$ (siehe (2.10)), so schreibt sich (3.6)

$$e^{-i\mathsf{H}s}\, b^{\cdot +}_{m\alpha\mu}(s)\,\Phi_{F_n} = \frac{i}{\sqrt{n!\,m!}} \sum_{(\sigma \boldsymbol{s})_{1\ldots m}} \sum_{(\tau \boldsymbol{t})_{1\ldots n}} \prod_{k=1}^{m} \Psi^{+}(\sigma\, \boldsymbol{s})_k \prod_{l=1}^{n} \Psi^{+}(\tau\, \boldsymbol{t})_l \tag{3.7}$$
$$\cdot \left\{ \sum_{k,l}^{\substack{1\ldots m\\ 1\ldots n}} \sum_{\sigma\tau\boldsymbol{s}} V\left(\begin{smallmatrix}\sigma_k \sigma\\ \tau_l \tau\end{smallmatrix};\, \boldsymbol{s}_k - \boldsymbol{t}_l,\, \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{w}_l)\right) f_{m\alpha}(\boldsymbol{s}\, s)\, G^{*}_{m\mu}\left(\begin{smallmatrix}\sigma_1 \ldots \sigma_{k-1}\sigma\sigma_{k+1} \ldots \sigma_m\\ \boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}_1 \ldots\ldots \boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}_m\end{smallmatrix};\, s\right) F_n\left(\begin{smallmatrix}\tau_1 \ldots \tau_{l-1}\tau\tau_{l+1} \ldots \tau_n\\ \boldsymbol{t}_1 \ldots\ldots \boldsymbol{t}_n\end{smallmatrix};\, t\right)\right\} \Phi_0 .$$

Beschränkt man sich (Dreiecksungleichung!) auf den typischen Potentialterm (2.7), so ergibt Ausführung der Differentiationen unter Berücksichtigung Jacobischer Koordinaten

$$\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{s}_{k+1} - (1/k)(\boldsymbol{s}_1 + \cdots + \boldsymbol{s}_k), \quad 1 \leqq k \leqq m-1, \quad \boldsymbol{r}_m = (1/m)(\boldsymbol{s}_1 + \cdots + \boldsymbol{s}_m)$$

und Eigenschaften der Funktionen $G_{m\mu}$ siehe Anhang II):

$$\| e^{-i\mathsf{H}s}\, b^{\cdot +}_{m\alpha\mu}(s)\,\Phi_{F_n} \| = \| b^{\cdot +}_{m\alpha\mu}(s)\,\Phi_{F_n} \| \leqq \frac{m\cdot n}{\sqrt{m!\,n!}} \sum_{0 \leqq p_1 \leqq p_2 \leqq p}$$
$$\cdot \left\| \sum_{\substack{(\tau \boldsymbol{t})_{1\ldots n}\\ (\sigma \boldsymbol{s})_{1\ldots m}}} \left[V_{op2}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ \vdots & \vdots & \\ a_0 & b_p & c_2\end{pmatrix};\, \boldsymbol{s}_m - \boldsymbol{t}_n \right) \check{f}_{m\alpha}(p_1;\, \boldsymbol{r}_m,\, s) \tag{3.8}$$
$$\cdot\, \hat{H}_{m\mu}\left(c_1{}^{p_1}_{p_2};\, \begin{smallmatrix}\sigma_1 \ldots \sigma_m\\ \boldsymbol{r}_1 \ldots \boldsymbol{r}_{m-1}\end{smallmatrix}\right) \hat{F}_n\left(c_2{}^{p_2}_{p};\, \begin{smallmatrix}\tau_1 \ldots \tau_n\\ \boldsymbol{t}_1 \ldots \boldsymbol{t}_n\end{smallmatrix}\, s\right)\Bigg] \prod_{k=1}^{m} \Psi^{+}(\sigma\, \boldsymbol{s})_k \prod_{l=1}^{n} \Psi^{+}(\tau\, \boldsymbol{t})_l\, \Phi_0 \right\| ,$$

wobei gesetzt wurde:

$$\hat{F}_n\left(c_2{}^{p_2}_{p};\, \begin{smallmatrix}\tau_1 \ldots \tau_n\\ \boldsymbol{t}_1 \ldots \boldsymbol{t}_n\end{smallmatrix};\, s\right) = \sum_{\tau} \boldsymbol{s}^{(2)}_{c_2;\,\tau_n \tau} \prod_{l=1+p_2}^{p} \left(-\tfrac{1}{2}\, \boldsymbol{w}_{n;\,b_l}\right) F_n\left(\begin{smallmatrix}\tau_1 \ldots \tau_{n-1}\tau\\ \boldsymbol{t}_1 \ldots \boldsymbol{t}_n\end{smallmatrix};\, s\right)$$

$$\hat{H}_{m\mu}\left(c_1{}^{p_1}_{p_2};\, \begin{smallmatrix}\sigma_1 \ldots \sigma_m\\ \boldsymbol{r}_1 \ldots \boldsymbol{r}_{m-1}\end{smallmatrix}\right) \sum_{\sigma} \boldsymbol{s}^{(1)}_{c_1;\,\sigma_m \sigma} \prod_{l=1+p_1}^{p_2} \left(-\tfrac{1}{2}\, \boldsymbol{u}_{m-1;\,b_l}\right) H_{m\mu}\left(\begin{smallmatrix}\sigma_1 \ldots \sigma_{m-1}\sigma\\ \boldsymbol{r}_1 \ldots \boldsymbol{r}_{m-1}\end{smallmatrix}\right),$$

$$\hat{f}_{m\alpha}(p_1\, \boldsymbol{r}_m s) = \prod_{l=1}^{p} \left(\tfrac{1}{2}\, \boldsymbol{v}_{m;\,b_l}\right) f_{m\alpha}(\boldsymbol{r}_m s) \underset{(s \neq 0)}{=} \left(\frac{M\cdot m}{2\pi i s}\right)^{3/2} \sum_{\boldsymbol{r}'} \exp\left\{ i\, \frac{M\cdot m}{s\, 2}\, (\boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}')^2\right\} \left[\prod_{l=1}^{p_1} \left(\frac{1}{2m}\, \boldsymbol{u}'_{b_l}\right) f_{m\alpha}(\boldsymbol{r}', 0)\right].$$

Mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung bzw. der sich daraus für Funktionen

$$V\left(\begin{smallmatrix}\varrho_1 \ldots \varrho_k\\ \bullet \ldots \bullet\end{smallmatrix}\right) \in L^2(R^{3k}_{\boldsymbol{r}})$$

ergebenden Beziehung

$$\left\| \sum_{(\varrho \boldsymbol{r})_{1\ldots k}} V\left(\begin{smallmatrix}\varrho_1 \ldots \varrho_k\\ \boldsymbol{r}_1 \ldots \boldsymbol{r}_k\end{smallmatrix}\right) \prod_{\varkappa=1}^{k} \Psi^{+}(\varrho\, \boldsymbol{r})_\varkappa\, \Phi_0 \right\|^2 \leqq k^2 \sum_{(\varrho \boldsymbol{r})_{1\ldots k}} \left| V\left(\begin{smallmatrix}\varrho_1 \ldots \varrho_k\\ \boldsymbol{r}_1 \ldots \boldsymbol{r}_k\end{smallmatrix}\right)\right|^2 \tag{3.9}$$

werden die Summanden von (3.8) einzeln abgeschätzt durch:

$$(m+n)!\left(\frac{M\cdot m}{2\pi |s|}\right)^3 \sum_{(\sigma \boldsymbol{s})_{1\ldots m}(\tau \boldsymbol{t})_{1\ldots n}} \left| \sum_{\boldsymbol{r}'} \exp\left\{ i\, \frac{M\cdot m}{2s}\, (\boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}')^2\right\} \left[\prod_{l=1}^{p_1} \left(\frac{1}{2m}\, \boldsymbol{u}'_{b_l}\right) f_{m\alpha}(\boldsymbol{r}', 0)\right] \right. \tag{3.10}$$
$$\left. \cdot\, V_{op2}(\cdots;\, \boldsymbol{s}_m - \boldsymbol{t}_n)\, \hat{F}_n\left(c_2{}^{p_2}_{p};\, \begin{smallmatrix}\tau_1 \ldots \tau_n\\ \boldsymbol{t}_1 \ldots \boldsymbol{t}_n\end{smallmatrix}\, s\right) \hat{H}_{m\mu}\left(c_1{}^{p_1}_{p_2};\, \begin{smallmatrix}\sigma_1 \ldots \sigma_m\\ \boldsymbol{r}_1 \ldots \boldsymbol{r}_{m-1}\end{smallmatrix}\right)\right|^2 .$$

Mit $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{s}_m - \boldsymbol{t}_n$ und $\boldsymbol{s}_k - \boldsymbol{r} - \boldsymbol{t}_n \to \boldsymbol{s}_k$ wird dann (3.10):

$$(m+n)!\left(\frac{M\cdot m}{2\pi |s|}\right)^3 \sum_{\boldsymbol{r}} |V_{op2}(\cdots;\, \boldsymbol{r})|^2 \left\{ \sum_{\boldsymbol{r}'} \left| \prod_{l=1}^{p_1} \left(\frac{1}{2m}\, \boldsymbol{u}'_{b_l}\right) f_{m\alpha}(\boldsymbol{r}', 0)\right| \right\}^2 \tag{3.11}$$
$$\cdot \sum_{\sigma_{1\ldots m}\boldsymbol{r}_{1\ldots m-1}} \left| \hat{H}_{m\mu}\left(c_1{}^{p_1}_{p_2};\, \begin{smallmatrix}\sigma_1 \ldots \sigma_m\\ \boldsymbol{r}_1 \ldots \boldsymbol{r}_{m-1}\end{smallmatrix}\right)\right|^2 \sum_{(\tau \boldsymbol{t})_{1\ldots n}} \left| \hat{F}_n\left(c_2{}^{p_2}_{p};\, \begin{smallmatrix}\tau_1 \ldots \tau_n\\ \boldsymbol{t}_1 \ldots \boldsymbol{t}_n\end{smallmatrix};\, s\right)\right|^2 .$$

Nach Anhang I gilt mit positiven zeitunabhängigen $K_{F_n}(c_2, p_2, p)$:

$$\sum_{(\tau t)_{1\ldots n}} \left|\hat{F}_n\left(c_2{}^{p_2}_{p}; {}^{\tau_1\ldots\tau_n}_{t_1\ldots t_n}; s\right)\right|^2 \leqq K_{F_n}(c_2 p_2 p)\,\|\Phi_{F_n}\|^2. \tag{3.12}$$

Da die Funktionen $\hat{H}_{m\mu}$ im wesentlichen gebundene Zustände beschreiben, sind sie ebenfalls quadratintegrabel anzunehmen.

Fordert man nun für die Potentialfunktionen

$$\sum_{r} |V_{op2}(\cdots; \boldsymbol{r})|^2 < +\infty \quad \text{bzw.} \tag{3.13}$$

$$\sum_{r} |V_I(\boldsymbol{r}) \prod_{k=1}^{o} \boldsymbol{r}_{a_k}|^2 < +\infty,$$

$$0 \leqq o \leqq 2; \quad a_k: 1, 2, 3;$$

$$I = R, P, L, TR, TP, TL, SL,$$

so läßt sich jeder Summand von (3.8) durch eine zeitabhängige obere Schranke

$$|s|^{-3/2} K_{F_n}^{m\alpha\mu}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & p_1 & c_1 \\ \vdots & \vdots & & \\ a_0 & b_p & p_2 & c_2\end{pmatrix} \|\Phi_{F_n}\|^2 \tag{3.14}$$

abschätzen. (3.8) führt dann auf

$$\|b^{\cdot+}_{m\alpha\mu}(s)\,\Phi_{F_n}\| \leqq \frac{m\cdot n}{\sqrt{m!\,n!}} \sum_{0\leqq p_1 \leqq p_2 \leqq p} |s|^{-3/2} K_{F_n}^{m\alpha\mu}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & p_1 & c_1 \\ \vdots & \vdots & & \\ a_0 & b_p & p_2 & c_2\end{pmatrix} \|\Phi_{F_n}\|$$

$$\leqq |s|^{-3/2} K_{\Phi}^{m\alpha\mu}\|\Phi_{F_n}\|. \tag{3.15}$$

3b) $b^{+}_{m\alpha\mu}(s)$ ist ein auf $\mathfrak{H}$ beschränkter Operator; Vertauschungsregeln

Da im Beweis der Beschränktheit der Operatoren und der Vertauschungsrelationen der Limeselemente (3.3)

$$\overset{\text{in}}{b}_{n\beta\nu}\,\overset{\text{in}}{b}{}^{+}_{m\alpha\mu} = \delta_{(n\beta\nu)(m\alpha\mu)} - (-1)^{n\cdot m}\,\overset{\text{in}}{b}{}^{+}_{m\alpha\mu}\,\overset{\text{in}}{b}_{n\beta\nu} \tag{3.16}$$

die zeitliche Ableitung und damit das Potential (2.6) nicht auftritt, ist die Rechnung[1] zu entnehmen.

3c) Zusammenfassung

Berücksichtigung von impuls- und spin-abhängigen Anteilen in einem phänomenologischen Potential bewirken eine Modifikation des Existenzbeweises für Streuzustände in zweifacher Hinsicht: ortsabhängige Terme in Tensor- und Bahn-Kräften machen eine Verschärfung der Integrabilitätsbedingung für das Potential notwendig, während die impulsabhängigen Terme die Existenz einer in $\mathfrak{H}$ dicht liegenden Menge $\mathfrak{H}'(p)$ voraussetzen; die Spinabhängigkeit ergibt keine neue Bedingung an das Potential.

Gibt es in $\mathfrak{H}$ dicht liegende Teilmengen $\mathfrak{H}'(1)$, $\mathfrak{H}'(2)$, so existieren unter der Maximalforderung

$$\sum_{r} |V_{opq}(\cdots, \boldsymbol{r})|^2 < +\infty, \quad 0 \leqq o, p, q \leqq 2$$

Streuzustände für das phänomenologische Potential (2.6).

Herrn Prof. Dr. G. GRAWERT danke ich für die Themenstellung und anregende Förderung dieser Arbeit.

Anhang I: Erläuterung zu (3.12)

Mit den Bezeichnungen von (3.8) ist:

$$\sum_{(\tau t)_{1\ldots n}} \left|\hat{F}_n\left(c_2{}^{p_2}_{p}; {}^{\tau_1\ldots\tau_n}_{t_1\ldots t_n}; t\right)\right|^2$$

$$= \sum_{(\tau t)_{1\ldots n}} \sum_{\tau\bar\tau} \boldsymbol{s}^{\times}_{c_2;\tau\bar\tau_n}\,\boldsymbol{s}_{c_2;\tau\bar\tau}\left[\prod_{l=1+p_2}^{p} (\tfrac{1}{2}\boldsymbol{w}_{n;b_l})\,F_n\left({}^{\tau_1\ldots\tau_n}_{t_1\ldots t_n}; t\right)\right]$$

$$\cdot \left[\prod_{l=1+p_2}^{p} (\tfrac{1}{2}\boldsymbol{w}_{n;b_l})\,F_n\left({}^{\tau_1\ldots\tau_{n-1}\bar\tau}_{t_1\;\ldots\;t_n}; t\right)\right].$$

Läßt sich

$$\sum_{\tau} \boldsymbol{s}^{\times}_{c;\tau\tau_n}\,\boldsymbol{s}_{c;\tau\bar\tau} = A^{c}_{\tau_n}\,\delta_{\tau_n\bar\tau}$$

zeigen, so ist

$$\sum_{(\tau t)_{1\ldots n}} \left|\hat{F}_n\left(c_2{}^{p_2}_{p}; {}^{\tau_1\ldots\tau_n}_{t_1\ldots t_n}; t\right)\right|^2 \leqq \max_{\tau_n} A^{c}_{\tau_n}$$

$$\cdot \sum_{(\tau t)_{1\ldots n}} \left|\prod_{l=1+p_2}^{p} (\tfrac{1}{2}\boldsymbol{w}_{n;b_l})\,F_n\left({}^{\tau_1\ldots\tau_n}_{t_1\ldots t_n}; t\right)\right|^2$$

Geht man von (2.10) aus (siehe Ansatz (3.5)), so gibt es eine zeitunabhängige nicht negative Konstante

$$K_{F_n}(c_2 p_2 p)$$

mit $\displaystyle\sum_{(\tau t)_{1\ldots n}} \left|\hat{F}_n\left(c_2{}^{p_2}_{p}; {}^{\tau_1\ldots\tau_n}_{t_1\ldots t_n}\, t\right)\right|^2 \leqq K_{F_n}(c_2 p_2 p)\,\|\Phi_{F_n}\|^2.$

Abschätzung für die Spinmatrizen:

$$c = 1, 2, 3 \quad \sum_{\tau} \boldsymbol{s}^{\times}_{c;\tau\tau_n}\,\boldsymbol{s}_{c;\tau\bar\tau} = (\boldsymbol{s}^2_c)_{\tau_n\bar\tau} = \tfrac{1}{4}\,\delta_{\tau_n\bar\tau} = A^{c}_{\tau_n}\,\delta_{\tau\tau_n}.$$

Anhang II: Die Funktionen $G^{\times}_{m\mu}$.

Die Funktionen $G^{\times}_{m\mu}$ sind bestimmt als Lösungen des Eigenwertproblems (2.13). Durch den Ansatz

$$G^{\times}_{m\mu}\left({}^{\sigma_1\;\;\ldots\;\;\sigma_m}_{s-s_1\ldots s-s_m}\right) = \delta(s-\boldsymbol{r}_m)\,H_{m\mu}\left({}^{\sigma_1\;\ldots\sigma_m}_{r_1\ldots r_{m-1}}\right),$$

wobei die $\boldsymbol{r}_j$ Jacobische Koordinaten

$$\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{s}_{k+1} - (1/k)(\boldsymbol{s}_1 + \cdots + \boldsymbol{s}_k). \qquad (1 \leqq k \leqq m-1),$$

$$\boldsymbol{r}_m = (1/m)(\boldsymbol{s}_1 + \cdots + \boldsymbol{s}_m)$$

gewählt wurden, ist dann die Forderung (2.12) erfüllt, und (2.13) reduziert sich auf die n-Teilchen-Schrödinger-Gleichung mit separierter Schwerpunktsbewegung für $H_{m\mu}$:

$$\left[-E_{m\mu} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{2\mu_k} \boldsymbol{u}_k^2\right] H_{m\mu}\binom{\sigma_1 \ldots \sigma_m}{\boldsymbol{r}_1 \ldots \boldsymbol{r}_{m-1}}$$

$$+ \sum_{l>k} \sum_{\sigma\sigma'} V\left(\begin{smallmatrix}\sigma_l \sigma \\ \sigma_k \sigma'\end{smallmatrix}; \boldsymbol{r}_{lk} \boldsymbol{u}_{lk}\right)$$

$$\cdot H_{m\mu}\left(\begin{smallmatrix}\sigma_1 \ldots \sigma_{k-1} \sigma' \sigma_{k+1} \ldots \sigma_{l-1} \sigma \sigma_{l+1} \ldots \sigma_n \\ \boldsymbol{r}_1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \boldsymbol{r}_{m-1}\end{smallmatrix}\right) = 0;$$

$$\frac{1}{\mu_k} = \frac{1}{M}\left(1 + \frac{1}{k}\right);$$

$$\boldsymbol{r}_{lk} = (\boldsymbol{s}_l - \boldsymbol{s}_k) = \boldsymbol{r}_{l-1} - \frac{k-1}{k} \boldsymbol{r}_{k-1} + \sum_{j=k}^{l-2} \frac{1}{j+1} \boldsymbol{r}_j$$

Anhang III: Definition der Potentialfunktionen

$$V_{TL}(\boldsymbol{r}) \tfrac{1}{2}\{(\boldsymbol{l}\, \boldsymbol{s}^{(1)}_{\sigma_1\sigma_1'})(\boldsymbol{s}\, \boldsymbol{l}^{(2)}_{\sigma_2\sigma_2'}) + (\boldsymbol{s}^{(2)}_{\sigma_2\sigma_2'} \boldsymbol{l})(\boldsymbol{l}\, \boldsymbol{s}^{(1)}_{\sigma_1\sigma_1'})\}$$

$$= \sum_{\substack{a_1 b_1 \\ c_1 c_2}} V_{TR}(\boldsymbol{r}) \left\{ \sum_k \frac{i}{2} (\varepsilon_{k a_1 c_1} \varepsilon_{k b_1 c_2} + \varepsilon_{k b_1 c_1} \varepsilon_{k a_1 c_2}) \boldsymbol{r}_{a_1} \boldsymbol{u}_{b_1} \right.$$

$$\left. + \sum_{a_2 b_2} \varepsilon_{a_1 b_1 c_1} \varepsilon_{a_2 b_2 c_2} \boldsymbol{r}_{a_1} \boldsymbol{r}_{a_2} \boldsymbol{u}_{b_1} \boldsymbol{u}_{b_2} \right\} \boldsymbol{s}^{(1)}_{c_1;\sigma_1\sigma_1'} \boldsymbol{s}^{(2)}_{c_2;\sigma_2\sigma_2'}$$

$$= \sum_{\substack{a_1 b_1 \\ c_1 c_2}} \left\{ V_{112}(a_1 b_1{}^{c_1}_{c_2}; \boldsymbol{r}) \prod_{l=1}^{1} \boldsymbol{u}_{b_l} \right.$$

$$\left. + \sum_{a_2 b_2} V_{222}\left(\begin{smallmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \end{smallmatrix}; \boldsymbol{r}\right) \prod_{l=1}^{2} \boldsymbol{u}_{b_l} \right\} \boldsymbol{s}^{(1)}_{c_1;\sigma_1\sigma_1'} \boldsymbol{s}^{(2)}_{c_2;\sigma_2\sigma_2'};$$

analog für $V_I(\cdot)$, $I = R, P, L, TR, TP, SL$.

Anhang IV. Verwendete Zeichen

$k, m, n; F$	Teilchenzahlen; Fragmentzahlen,
α, β	Quantenzahlen der Schwerpunktsbewegung,
μ, ν	interne Quantenzahlen,
$t; s$	Zeiten,
$\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}_m; \boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}_m; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}_m, \boldsymbol{r}_{12}, \boldsymbol{r}_{a_k};$	diverse Ortsvariablen,
$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m;b_l}; \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}', \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}_{12}, \boldsymbol{u}_{b_l}; \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}_{m;b_l}; \boldsymbol{k}$	diverse Impulsvariablen,
$\boldsymbol{l}$	Drehimpuls,
$\tau, \tau_k; \sigma, \sigma_k; \sigma', \sigma_k; \varrho, \varrho_k$	Spinindizes,
$\boldsymbol{s}_{\sigma\sigma'}, \boldsymbol{s}^{(1)}_{\sigma_1\sigma_1'}, \boldsymbol{s}_{c;\sigma\sigma'}, \boldsymbol{s}^{(1)}_{c_1;\sigma_1\sigma_1'}$	Spinmatrizen als Vektoren,
$V, V_I, V_{opq}; U, U_{\sigma\sigma'}$	Potentialfunktionen,
$f_{m\alpha}, \hat{f}_{m\alpha}, \tilde{f}_\alpha$	Einteilchen-Wellenfunktionen,
$G_m, G_{m\mu}, G^{\times}_{m\mu}; H_{m\mu}, \hat{H}_{m\mu}; F_n, \overline{F}_n, D^p_k F_n, V$	Mehrteilchen-Wellenfunktionen,
$\Psi, \Psi^+, \dot{\Psi}$	Einteilchen-Feldoperatoren,
$b_{m\alpha\mu}, b^{\substack{\text{in}\\\text{out}}}_{m\alpha\mu}, b^{\pm}_{m\alpha\mu}, b^{\substack{+\text{in}\\\text{out}}}_{m\alpha\mu}, \dot{b}^{+}_{m\alpha\mu}, B_{m\mu}, B^{+}_{m\mu}$	Mehrteilchen-Feldoperatoren,
$\mathsf{H}, \mathsf{N}, \mathsf{N}^{-1}, \mathbf{P}, \mathbf{R}$	Observablen,
$\Phi, \Phi_0, \Phi_{m\alpha\mu}, \Phi^{\substack{\text{in}\\\text{out}}}_{m\alpha\mu}, \Phi_{(m\alpha\mu)_1 \ldots (m\alpha\mu)_F}$	Ein-, Mehrfragment-Zustände,
$\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_m, \mathfrak{H}', \mathfrak{H}'_m, L^2(R^n_r)$	Zustandsräume, -mengen, Funktionenmenge,
$\delta_{\sigma\sigma'}, \delta_{(m\alpha\mu)(n\beta\nu)}; \delta(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}')$	Kroneckersymbol; Diracsche δ-Funktion,
$f, k, l, I(R, P, L, SL, TR, TP, TL), o, p, p_1, q$	diverse Summations-, Multiplikationsindizes,
a, b, c, a_k, b_l, c_1	Vektorenkomponenten,
$E, E_{m\mu}, M, K, K_{Fn}, K^{m\alpha\mu}_{Fn}, K^{m\alpha\mu}_{\Phi}, A, A^c_{\tau_n}$	diverse Konstanten.